MATEMATICAS II

RANGO DE UNA MATRIZ. METODO DE ORLADO

Rango de una matriz:
El rango de una matriz es el número de filas (o columnas) linealmente independientes.

[$F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ son linealmente independientes si de cualquier combinación lineal de ellas igualadas a la matriz fila nula se deduce que todos sus coeficientes han de ser iguales a cero:

$$\alpha_1 \cdot F_1 + \alpha_2 \cdot F_2 + \alpha_3 \cdot F_3 + \ldots + \alpha_n \cdot F_n = 0 \;\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$$

En caso contrario se dice que las filas son linealmente dependientes.
Propiedad:
Si un conjunto de filas son linealmente dependientes entonces alguna de ellas se puede poner como combinación lineal de las demás, y viceversa.]

Menor complementario:
Es el determinante de la submatriz resultante de eliminar en la matriz todas las filas menos r de ellas y todas las columnas menos r de ellas. En este caso se dice que el menor es de orden r.

Rango de una matriz por determinantes:
El rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

Orlar:
Consideremos un menor de orden r de una matriz A. El menor de orden r + 1 resultante de añadirle al menor anterior la fila i y la columna j, se dice que se ha construido a partir de él “orlando” dicho menor con la fila i y la columna j.
Propiedad:
1) Si orlamos un menor con la fila i de una matriz y todas las columnas posibles de dicha matriz, y todos los menores resultantes son iguales a cero, entonces la fila i es combinación lineal de las filas del menor (y por tanto la podemos eliminar en el cálculo del rango).
2) Consideremos un menor de orden r. Si todos los menores de orden r + 1 que se obtienen orlando dicho menor con las filas y columnas que resten en la matriz son iguales a cero, entonces el rango de A [rg(A)] es igual a r.

Método de Orlado:
Para hallar el rango de una matriz partimos de un menor no nulo y vamos orlando con las filas y columnas restantes hasta encontrar el máximo menor no nulo de la matriz. Su orden es el rango.
A esta forma de hallar el rango de una matriz se le llama método de orlado.

REGLA PRACTICA PARA CALCULA R EL RANGO DE UNA MATRIZ M EDIAN TE DETERMINANTES.

1. Se prescinde de todas las líneas formadas por ceros, ya que la matriz nula depende linealmente de cualquier conjunto de líneas.
2. Si a simple vista se descubre alguna línea que sea combinación lineal de las demás, se prescinde de ella y si no, se trabaja con toda la matriz según indicamos a continuación.
3. Se elige un elemento de A no nulo. Sea éste por ejemplo a_{11}. Con lo cual r(A)=1.
4. Se considera el menor $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, si éste es nulo, se sustituye su segunda columna por las restantes columnas hasta encontrar un menor de orden 2 no nulo.

Si todos ellos fueran nulos, la segunda fila depende linealmente de la primera, y se puede prescindir de ella para el cálculo del rango. Se sustituye entonces la segunda fila por la tercera y se consideran los menores: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, , ..., $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix}$, hasta encontrar uno no nulo.

Si fueran todos nulos, seguiremos hasta llegar a la fila i de A tal que algún menor: , , ..., , fuese no nulo.

Si para todas las filas, todos estos menores de orden 2 fuesen nulos | r(A)=1.

Supongamos que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, | r(A) = 2.

5. A continuación se forman los menores de orden 3 a partir de éste último no nulo, de igual forma que como hemos hecho para los de orden 2.

Si todos los menores de orden 3 son nulos | r(A) = 2.

Si hay uno no nulo | r(A) = 3.

6. El proceso continuará del mismo modo hasta agotar las filas (o columnas) de A.